A5 est l'unique groupe simple d'ordre 60

Développement pour les leçons 101 [1], 103 [2], 104 [3], 105 [4].

1 Introduction

L'objectif de ce développement est de montrer que $\mathfrak{A}_5$ est l'unique groupe simple d'ordre 60. Pour cela, on utilisera **À MORT** les théorèmes de Sylow. Pour ce faire, on montrera d'abord que si un groupe d'ordre 60 est simple, alors il est nécessairement isomorphe à $\mathfrak{A}_5$ puis on montrera que $\mathfrak{A}_5$ est bien simple. Pour le premier point, l'idée principale est de montrer que si G est un groupe simple d'ordre 60, alors il possède 5 2-Sylow. Ainsi, l'action de G sur ses 2-Sylow par conjugaison nous permet d'obtenir l'isomorphisme attendu.

2 Développement

Dans un premier temps, montrons que si un groupe G est simple d'ordre 60, alors G est nécessairement isomorphe à $\mathfrak{A}_5$.

Soit G un groupe simple d'ordre $60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Notons N_2, N_3 et N_5 le nombre de 2-Sylow, de 3-Sylow et de 5-Sylow de G. On a que $N_5 = 1[5]$ et $N_5 | 12$ donc $N_5 \in \{1, 6\}$. Mais si $N_5 = 1$, alors G possède un unique 5-Sylow qui serait distingué, ce qui n'est pas possible par hypothèse sur G, donc $N_5 = 6$ et on en déduit directement que G possède $6 \cdot (5-1) = 24$ éléments d'ordre 5. On a de même que $N_3 = 1[3]$ et que $N_3 | 20$ donc $N_3 \in \{1, 4, 10\}$. On a $N_3 \neq 1$ pour les mêmes raisons que tout à l'heure. Si on a $N_3 = 4$, l'action de G sur ses 4-Sylow nous fournit un morphisme $G \to \mathfrak{S}_4$ qui sera injectif par simplicité de G, ce qui est contradictoire au vu des ordres des groupes. D'où $N_3 = 10$ et G possède $10 \cdot (3-1) = 20$ éléments d'ordre 3.

Attaquons-nous maintenant aux 2-Sylow. De la même façon que précédemment, on obtient que $N_2 \in \{1, 3, 5, 15\}$. On a $N_2 \neq 1$ car G est simple et $N_2 \neq 3$ car on aurait sinon un morphisme injectif $G \to \mathfrak{S}_3$. Montrons alors qu'on a $N_2 = 5$. Supposons donc par l'absurde que $N_2 = 15$. Pour des raisons de cardinalité, les 2-Sylow ne peuvent être tous disjoints. Notons S_1 et S_2 deux 2-Sylow tels que $S_1 \cap S_2 \neq \{1_G\}$. Soit $a \in S_1 \cap S_2$ avec $a \neq 1_G$. Notons aussi H le sous-groupe engendré par S_1 et S_2. On a que 4 divise $|H|$ car $S_1 \subset H$ et $|H| > 4$ car $S_2 \subset H$. Comme H est un sous-groupe de G, on a que $|H| \in \{12, 20, 60\}$. On va montrer qu'aucune de ces trois possibilités peuvent arriver.

Si jamais on avait que $|H| = 60$, on sait que a commute avec tout les éléments de S_1 (car S_1 est d'ordre 4 donc est commutatif) et aussi avec tout les éléments de S_2. Comme H est généré par S_1 et S_2, on a que $a \in Z(G)$ le centre de G, ce qui est absurde car G est simple. Supposons donc que $|H| = 20 = 2^5 \cdot 5$. En appliquant de nouveau les théorèmes de Sylow à H, on obtient que H possède un unique 5-Sylow que l'on note K. On fait agir G sur l'ensemble de ses 5-Sylow par conjugaison. D'une part, comme K est l'unique 5-Sylow de H, on a que $H \subset \mathrm{Stab}_G(K)$ et donc $|\mathrm{Stab}_G(K)| \geq 2$. Or, il y a 6 5-Sylow dans G et K est aussi un 5-Sylow de G, donc on a que $|\mathrm{Stab}_G(K)| = \frac{60}{6} = 10$ ce qui est absurde, donc $|H| \neq 20$. Si maintenant $|H| = 12 = 2^2 \cdot 3$, notons k_2 et k_3 le nombre de 2-Sylow et de 3-Sylow de H. Alors $k_2 \in \{1, 3\}$ et $k_3 \in \{1, 4\}$. Or, on a que S_1 et S_2 sont des 2-Sylow de H, d'où $N_2 = 3$. Notons S_3 le troisième 2-Sylow. Comme on a vu que $a \in Z(H)$ et qu'on a de plus que S_1 et S_3 sont conjugués dans H, on a $a \in S_3$. Ainsi, il y a $8 - 1 = 7$ éléments d'ordre 2 ou d'ordre 4, donc $12 - 7 - 1 = 4$ éléments d'ordre 3, ce qui nous donne que $k_3 = 2$ ce qui est contradictoire avec l'étude préliminaire. Ainsi, on a que $N_2 \neq 15$ et donc $N_2 = 5$.

En faisant agir G sur ses 5 2-Sylow, on obtient un morphisme injectif $G \to \mathfrak{S}_5$, et comme $\mathfrak{A}_5$ est l'unique groupe d'indice 2 de $\mathfrak{S}_5$, on a que $G \simeq \mathfrak{A}_5$. Il faut maintenant montrer que $\mathfrak{A}_5$ est simple. Listons tout d'abord les éléments de $\mathfrak{A}_5$ selon leurs types (ainsi, tout ces éléments seront conjugués entre-eux). On a :

1. L'identité, ce qui fait un élément.
2. Les doubles-transpositions, ce qui fait $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{4} = 15$ éléments.
3. Les 3-cycles, ce qui fait $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3} = 20$ éléments.
4. Les 5-cycles, ce qui fait $\frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{5} = 24$ éléments.

On sait de plus que les doubles-transpositions et les 3-cycles engendrent $\mathfrak{A}_5$. Il suffit donc de montrer que si H est un sous-groupe distingué non réduit à l'identité de $\mathfrak{A}_5$, alors H contient une double-transposition ou un 3-cycle. On aura ainsi le résultat comme ces derniers sont conjugués dans $\mathfrak{A}_5$. Or, si jamais H contient un 5-cycle, alors H contient tout les 5-cycle et donc on a que $|H| \geq 24$ et donc $|H| = 30$ ou $|H| = 60$ par Lagrange, donc H contient au moins un 3-cycle ou une double-transposition, d'où le résultat.

1. Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.
2. Conjugaison dans un groupe. Exemples de sous-groupes distingués et de groupes quotients. Applications.
3. Groupes abéliens et non abéliens finis. Exemples et applications.
4. Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.

3 Bibliographie

`https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/ perrin/TER/petitssimples.pdf`, je n'ai pas trouvé de livre le faisant...